

Мярка на Хаар

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

16 юни 2018

Мерките на Хаар обобщават някои широко използвани мерки с „хубави“ свойства. Накратко ще припомним свойствата на лебеговата мярка m върху реалната права, които са искаме да обобщим.

Определение. За всяко измеримо по Лебег подмножество на реалната права мярката на Лебег се дефинира чрез

$$m(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : \begin{array}{l} \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty} \text{ е фамилия от отворени интервали} \\ \text{на } \mathbb{R}, \text{ за които е изпълнено } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \end{array} \right\}$$

Ще се ограничим само до единичния интервал. Нека $G = [0, 1)$ и $x \oplus y = \{x + y\} \forall x, y \in G$, т.е. $\oplus$ съпоставя на две числа от единичния интервал дробната част на тяхната сума. Въведохме тази операция, за да не се бъркаме със стандартната операция $+$. Практическото значение на рестрикцията на лебеговата мярка върху единичния интервал идва от това, че с помощта на m можем да дефинираме мярка върху окръжност.

Полагаме $C(G)$ да бъде банаховото пространство от непрекъснатите над G комплекснозначни функции и за всяко $g \in G$ дефинираме функциите

$$L_g f(x) = f(g \oplus x) \quad R_g f(x) = f(x \oplus g) \quad I(x) = 1 - x \quad (1)$$

Операторите L_g и R_g задават леви и десни трансляции на f , а функцията I съпоставя на число x обратното му относно операцията $\oplus$. Тогава са в сила следните свойства

- Пълнота:

$$\text{Ако } E \text{ е измеримо, } m(E) = 0 \text{ и } T \subseteq E \implies T \text{ е измеримо и } m(T) = 0 \quad (2)$$

- Положителност:

$$m(E) \geq 0 \quad \forall \text{ измеримо } E \quad (3)$$

- Нормираност:

$$m(G) = 1 \quad (4)$$

- Външна регулярност:

$$m(E) = \inf\{m(O) : O \supseteq E \text{ е измеримо и отворено}\} \quad (5)$$

- Вътрешна регулярност:

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E \text{ е измеримо и компактно}\} \quad (6)$$

- Лева транслационна инвариантност:

$$\int_G f dm = \int_G (L_g f) dm \quad \forall g \in G \quad \forall f \in C(G) \quad (7)$$

- Дясна транслационна инвариантност:

$$\int_G f dm = \int_G (R_g f) dm \quad \forall g \in G \quad \forall f \in C(G) \quad (8)$$

- Инвариантност при композиция на подинтегралната функция с I :

$$\int_G f dm = \int_G (f \circ I) dm \quad \forall g \in G \quad \forall f \in C(G) \quad (9)$$

Мерките на Хаар се дефинират за всяка компактна топологична група, т.е. няма нужда да се ограничаваме само до линейни пространства. За да запазим аналогията с лебеговата мярка ще бележим груповата операция с $+$.

Определение. Ако на групата $(G, +)$ е съпоставена топология τ такава, че груповите операции $+$ и $g \mapsto -g$ са непрекъснати, т.е. $\phi(x, y) = x - y$ е непрекъснатата функция, и всяко едноточково множество от G е затворено, то G се нарича топологична група.

Определение. Топологичната група $(G, +)$ се нарича компактна ако множеството G е τ -компакт.

Навсякъде долу $(G, +)$ е топологична група с топология τ и идентитет e .

Достатъчно да разглеждаме само локални бази на e , тъй като изображенията $g \mapsto a + g$, $g \mapsto g + a$ и $g \mapsto -g$ са хомеоморфизми и следователно всяка околност на всяка точка е транслация на околност на e .

Определение. Комплекснозначната функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ се нарича равномерно непрекъснатата, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува околност V на e такава, че $\forall x, y \in G : x - y \in V \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Въвеждаме аналогични на (1) означения. Полагаме $C(G)$ да бъде банаховото пространство от непрекъснатите над G комплекснозначни функции и за всяко $g \in G$ дефинираме функциите

$$L_g f(x) = f(g + x) \quad R_g f(x) = f(x + g) \quad I(x) = -x$$

В сила е следната теорема

Теорема 1. *Върху всяка компактна група G съществува единствена мярка със свойствата (2)–(9), наричана мярка на Хаар.*

За да я докажем ще ни бъде необходима

Теорема 2. *Нека G е компактна група и $f \in C(G)$. Дефинираме $H_L(f) = \{L_g f : g \in G\}$ и $K_f = \overline{\text{conv}} H_L(f)$. Тогава са изпълнени*

1. $g \mapsto L_g f$ е непрекъснато изображение от G в $C(G)$
2. K_f е компактен в $C(G)$,

Доказателство на теорема 2. Фиксираме $\varepsilon > 0$. Тъй като f е непрекъсната, за всяко $a \in G$ съществува околност W_a на a такава, че от $x - a \in W_a$ следва $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Непрекъснатостта на груповите операции ни дава околности V_a на e , за които $-V_a + V_a \subseteq W_a$. Тъй като G е компактен, съществува крайно множество $A \subseteq G$ такава, че

$$G = \bigcup_{a \in A} (a + V_a).$$

Полагаме $V = \bigcap_{a \in A} V_a$. Избираме $x, y \in G$ такива, че $y - x \in V$ и избираме $a \in A$ такава, че $y - a \in V_a$. Тогава $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$ и, понеже $x - a = (x - y) + (y - a) \in -V + V_a \subseteq W_a$, имаме $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Следователно $|f(y) - f(x)| < 2\varepsilon$ когато $y - x \in V$.

За всяко $g \in G$ имаме $(y + g) - (x + g) = y - x$, а значи $y - x \in V$ влече $|f(x + g) - f(y + g)| < 2\varepsilon$, т.е.

$$\|L_y f - L_x f\| < 2\varepsilon$$

когато $y \in V_x$, където V_x е околност на x . С това 1 е доказано.

Следователно множеството $H_L(f) = \{L_g f : g \in G\}$ е компактен в $C(G)$. Тъй като $C(G)$ е банахово, за да докажем 2 е достатъчно да покажем, че K_f е напълно ограничено. Тъй като $H_L(f)$ е компактен, $H_L(f)$ е напълно ограничено множество и следователно съществува крайно множество $A \subseteq H_L(f)$ такава, че $H_L(f) \subseteq A + B_\varepsilon(e)$. От друга страна, $\text{conv } A$ също е компактен като непрекъснато изображение на симплекс от $\mathbb{R}^n$, следователно $\text{conv } A \subseteq A' + B_\varepsilon(e)$ за някое крайно множество $A' \subseteq G$. Следователно $\text{conv } H_L(f) \subseteq \text{conv } A + B_\varepsilon(e) \subseteq A' + B_\varepsilon(e) + B_\varepsilon(e) = A' + 2B_\varepsilon(e)$, тоест $\text{conv } H_L(f)$ също е напълно ограничено.

Но затворената обвивка на напълно ограничено множество също е напълно ограничена следователно K_f е компактен. $\square$

Доказателство на теорема 1. Първо да отбележим, че левите трансляции на $f \in C(G)$ образуват равностепенно непрекъсната група в $C(G)$ относно композиция. Наистина, $(L_s L_t f)(x) = (L_s(L_t f))x = f(tsx) = L_{ts}(f)(x)$ и всеки от операторите $\{L_g\}_{g \in G}$ е изометрия на $C(G)$ в себе си. Освен това от теорема 2 K_f е компактен и очевидно $L_g(K_f) = K_f \ \forall g \in G$. Прилагаме теоремата за фиксираната точка на Какутани за

изпъкналото множество $K_f \subseteq C(G)$ и $\{L_g\}_{g \in G}$ и получаваме, че съществува непрекъснатата функция $\phi \in C(G)$ такава, че $L_g \phi = \phi \ \forall g \in G$. В частност, $\phi(g) = \phi(e)$, следователно ϕ е константа. От компактността на K_f следва, че тази константа може да бъде равномерно приближена с функции от $\text{conv } H_L(f)$.

И така, установихме, че за всяка функция $f \in C(G)$ съществува константа l , която може да бъде равномерно приближена с изпъкнали комбинации на функции леви трансляции на f . Аналогично се установява, че съществува константа r , която може да бъде равномерно приближена с изпъкнали комбинации на десни трансляции на f . Ще докажем, че $l = r$.

Фиксираме $\varepsilon > 0$ и $x \in G$. Съществуват елементи $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ на G и положителни числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ с $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^m \beta_j = 1$ такива, че

$$\left| l - \sum_{i=1}^n \alpha_i L_{a_i} f(x) \right| < \varepsilon, \quad (10)$$

$$\left| r - \sum_{j=1}^m \beta_j R_{b_j} f(x) \right| < \varepsilon. \quad (11)$$

След като заместим x с b_j в (10) и умножим с β_j , получаваме

$$\left| \beta_j l - \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_j f(a_i + b_j) \right| < \beta_j \varepsilon.$$

Сега сумираме по $j = 1, \dots, m$:

$$\left| l - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i + b_j) \right| < \varepsilon.$$

Аналогично получаваме

$$\left| r - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i + b_j) \right| < \varepsilon.$$

Тъй като избрахме ε и x да бъдат произволни, получаваме $l = r$.

Получихме, че за всяка функция $f \in C(G)$ съществува единствено число Mf , което може да бъде равномерно приближено от изпъкнали комбинации леви (или на десни) трансляции на f . От (10) и (11) непосредствено следват свойствата

- За всяка положителна функция $f \geq 0$ имаме

$$Mf \geq 0 \quad (12)$$

- За всяка функция f имаме

$$Mf \leq \|f\| \quad (13)$$

- $Mc = c$ за всяка константна функция $c \in C(G)$. В частност,

$$M1 = 1 \quad (14)$$

- $\forall f \in C(G)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ имаме

$$M(\alpha f) = \alpha Mf \quad (15)$$

- Тъй като L_g и R_g са затворени относно композиция, $\forall g \in G$ и $\forall f \in C(G)$ имаме

$$M(L_g f) = Mf = M(R_g f) \quad (16)$$

Ще докажем, че $\forall f, g \in C(G)$ е изпълнено

$$M(f + p) = Mf + Mp. \quad (17)$$

От (10) имаме

$$\left| Mf - \sum_{i=1}^n \alpha_i L_{a_i} f(x) \right| < \varepsilon. \quad (18)$$

Полагаме $h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_{a_i} p(x)$. От $h \in K_p$ следват $K_h \subseteq K_p$ и $Mh = Mp$. Следователно съществуват елементи $b_1, \dots, b_m$ на G и положителни числа $\beta_1, \dots, \beta_m$ с $\sum_{j=1}^m \beta_j = 1$, за които е изпълнено

$$\left| M_p - \sum_{j=1}^m \beta_j L_{b_j} h(x) \right| = \left| M_p - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j p(a_i + b_j + x) \right| < \varepsilon.$$

От (18) получаваме

$$\left| Mf - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(a_i + b_j + x) \right| < \varepsilon.$$

Полагаме $\gamma_k = \alpha_i \beta_j$ и $c_k = a_i + b_j$ за $k = 1, \dots, nm$, където $i = \lfloor \frac{k}{m} \rfloor$ и $j = k \pmod{m}$. Като съберем горните две неравенства, получаваме

$$\left| Mf + Mp - \sum_{k=1}^{nm} \gamma_k L_{c_k} (f + p)(x) \right| < 2\varepsilon,$$

откъдето следва, че $Mf = Mp$. Следователно M е положителен (от (12)), ограничен (от (13)), нормиран (от (13) и (14)) и линеен (от (15) и (17)) функционал и от теоремата на Рис за представяне на линейни функционали в локално компактни хаусдорфови топологични пространства следва, че съществува σ -алгебра над G , съдържаща бореловите множества, и над нея е дефинирана пълна (свойство (2)), положителна (свойство (3)), нормирана (свойство (4)) и регулярна (свойства (5) и (6)) борелова мярка m такава, че за $f \in C(G)$

$$Mf = \int_G f dm.$$

Транслационната инвариантност на m (свойства (7) и (8)) следва от (16). Оттук за всяка функция $f \in C(G)$ следва и свойството (9):

$$\begin{aligned} \int_G (f \circ I) dm &= \int_G f(-x) dm(x) = \int_G dm(y) \int_G f(-x) dm(x) = \\ &= \int_G \left(\int_G f(-x) dm(x) \right) dm(y) = \int_G \left(\int_G f(y-x) dm(x) \right) dm(y) = \\ &= \int_G \left(\int_G f(y-x) dm(y) \right) dm(x) = \int_G \left(\int_G f(y) dm(y) \right) dm(x) = \\ &= \int_G dm(x) \int_G f(y) dm(y) = \int_G f(y) dm(y) = \int_G f dm. \end{aligned}$$

Остана да докажем единствеността на мярката m . Нека μ е друга мярка върху G със свойствата (2)- (9). Имаме

$$\int_G f d\mu = \int_G dm(y) \int_G L_y f(x) d\mu(x) = \int_G d\mu(x) \int_G R_x f(y) dm(y) = \int_G f dm.$$

Следователно $m = \mu$. □